Chapitre 18. Probabilités discrètes ($2^{\text{ème}}$ partie)

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

1 Variance d'une variable aléatoire discrète

1.1 Moment d'ordre p

Définition 1.1. Soit X une v.a.d. $X : \Omega \to \mathbb{K}$
On dit que X admet un moment d'ordre p ($p \in \mathbb{N}^*$) si $\mathbb{E}\left(|X|^p\right) < +\infty$

Proposition 1.2. Soit $X : \Omega \to \mathbb{K}$ une vad et $1 \leq q \leq p$ dans $\mathbb{N}$

1. Si X admet un moment d'ordre p il admet un moment d'ordre q
2. Si $X, Y : \Omega \to \mathbb{K}$ vad admettent des moments d'ordre p, il en va de même de $\lambda X + \mu Y$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

1.2 Variance

Définition 1.3. On note :

$$L^1(\Omega) = L^1 = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid \mathbb{E}(|X|) < +\infty\}$$
$$L^2(\Omega) = L^2 = \left\{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid \mathbb{E}(|X|^2) < +\infty\right\}$$

On a $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$

Proposition 1.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit $X, Y \in L^2(\Omega)$
Alors XY admet une espérance et

$$\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$$

avec égalité ssi $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \lambda X + \mu Y = 0$ p.s.

Corollaire 1.5. Si $X \in L^2(\Omega)$ alors X admet une espérance et

$$\boxed{\mathbb{E}(|X|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}}$$

Définition 1.6. Soit $X \in L^2(\Omega)$
On appelle variance de X le réel

$$\operatorname{Var}(X) = V(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

L'écart type de X est

$$\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var} X} = \sqrt{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)}$$

Proposition 1.7.

1. Si $X \in L^2(\Omega)$ alors
$$\boxed{\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$
2. Si $a, b \in \mathbb{R}$ alors
$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Var}(X - a) &= \operatorname{Var}(X) \\ \operatorname{Var}(bX) &= b^2 \operatorname{Var}(X) \end{aligned}}$$

Définition 1.8. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une vard (variable aléatoire réelle discrète)

1. Si $X \in L^1$, on pose $\overset{\circ}{X} = X - \mathbb{E}(X)$
   C'est la variable contrée associée à X
2. Si $X \in L^2$, on pose $\widetilde{X} = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$
   C'est la variable centrée réduite associée à X

1.3 Covariance

Définition 1.9. Soit $X, Y \in L^2(\Omega)$
Alors $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) = \overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}$ admet une espérance appelée covariance de X et Y et notée

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right) = \mathbb{E}(\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}) = \mathrm{Cov}(Y, X)$$

Proposition 1.10 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Soit $X, Y \in L^2(\Omega)$
Alors :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y)^2 \leq \mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}$$

Proposition 1.11.

1. Soit $X, Y \in L^2(\Omega)$ indépendants
   Alors

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = 0}$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)}$$

2. Si $X_1, ..., X_n \in L^2(\Omega)$ indépendantes, alors

$$\boxed{\mathrm{Var}(X_1 + ... + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + ... + \mathrm{Var}(X_n)}$$

1.4 Variance des lois discrètes classiques

1.4.1 Loi de Bernoulli

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors

$$\boxed{\mathrm{Var}\, X = p(1 - p) = pq}$$

1.4.2 Loi binomiale

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors

$$\boxed{\mathrm{Var}\, X = npq}$$

1.4.3 Loi géométrique

Si $X \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$ avec $0 < p < 1$ alors

$$\boxed{\mathrm{Var}\, X = \frac{q}{p^2}}$$

Si $X \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ alors $Y = X + 1$ et $\mathrm{Var}\, X = \mathrm{Var}\, Y = \frac{q}{p^2}$

1.4.4 Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors

$$\boxed{\operatorname{Var} X = \mathbb{E}(X) = \lambda}$$

1.5 Inégalité de Markov et de Tchebychev

Proposition 1.12 (Inégalité de Markov)**.** Soit X une vard sur Ω possédant une espérance.
Alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\boxed{\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\varepsilon}}$$

Corollaire 1.13 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.** Soit X une vard à variance finie et $\varepsilon > 0$
Alors

$$\boxed{\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{Var}(X)}{\varepsilon^2}}$$

2 Fonctions génératrices

2.1 Généralités

Ici $X : \Omega \to \mathbb{N}$

Définition 2.1. On pose

$$G_X : \begin{cases} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ s \mapsto \mathbb{E}(s^X) \end{cases}$$

C'est la fonction génératrice de X

Proposition 2.2. Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une vad, G_X sa fonction génératrice et $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$

1. Le domaine de définition de G_X contient $[-1,1]$ et si $s \in [-1,1]$ alors $G_X(s) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n s^n$
   En particulier G_X est une série entière de rayon $R \geq 1$
   De plus pour $s \in [-1,1]$, $|G_X(s)| \leq 1$ et $G_X(1) = 1$
2. G_X est continue sur $[-1,1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$\boxed{p_n = \mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}}$$
   G_X caractérise la loi de X

Proposition 2.3.

1. Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ vad indépendantes.
   Alors pour tout $s \in [-1,1]$
   $$\boxed{G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)}$$
2. Si $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{N}$ vad indépendantes alors pour tout $s \in [-1,1]$
   $$\boxed{G_{X_1+...+X_n}(s) = G_{X_1}(s)...G_{X_n}(s)}$$

2.2 Fonctions génératrices des lois classiques

2.2.1 Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$

Si $X \sim \mathcal{U}([\![1, N]\!])$ alors

$$\boxed{G_X(s) = \frac{s}{N}\frac{1 - s^N}{1 - s}}$$

2.2.2 Loi de Bernoulli

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors

$$\boxed{G_X(s) = q + sp}$$

2.2.3 Loi binomiale

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors

$$\boxed{G_X(s) = (q + sp)^n}$$

2.2.4 Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors

$$\boxed{G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}}$$

2.2.5 Loi géométrique

Si $X \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$ avec $0 < p < 1$ alors

$$\boxed{G_X(s) = \frac{sp}{1 - sq}}$$

Si $X \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ alors

$$\boxed{G_X(s) = \frac{p}{1 - sq}}$$

2.3 Obtention des moments

Proposition 2.4. Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une vad, $r \geq 1$
Alors X admet un moment d'ordre $r \iff G_X$ est $\mathcal{C}^r$ sur $[0, 1]$
X est d'espérance finie $\iff G_X$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$
X est à variance finie $\iff G_X$ est $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$
Dans ces conditions, respectivement :

$$G_X^{(r)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)...(X-r+1))$$

$$\boxed{G'_X(1) = \mathbb{E}(X)}$$

$$\boxed{\operatorname{Var} X = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2}$$

3 Convergence de variables aléatoires

3.1 Convergence en probabilité

Définition 3.1. Soit $X_n : \Omega \to \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$) vad et $X : \Omega \to \mathbb{K}$
On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers X si $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3.2 Loi faible des grands nombres

Théorème 3.2 (Loi faible des grandes nombres)**.**
Soit $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ vard indépendantes de même loi et à variance finie.
On note $m = \mathbb{E}(X_1)$ leur espérance commune.
Alors $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1+...+X_n}{n}$ converge en probabilité vers m.
Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$